

V. FUNGSI TRIGONOMETRI DAN FUNGSI INVERS

TRIGONOMETRI

5.1 Pendahuluan

A. Tujuan

Setelah mempelajari bagian ini diharapkan mahasiswa dapat:

1. menyebutkan definisi sinus, cosinus dan tangen dalam segitiga siku-siku;
2. menghitung nilai sinus, cosinus dan tangen suatu sudut;
3. menggambar grafik fungsi sinus;
4. menentukan perioda fungsi sinus;
5. menentukan maksimum dan minimum fungsi sinus;
6. menggambar grafik fungsi cosinus;
7. menentukan perioda fungsi cosinus;
8. menentukan maksimum dan minimum fungsi cosinus;
9. menggambar grafik fungsi tangen;
10. menentukan perioda fungsi tangen;
11. menentukan maksimum dan minimum fungsi tangen
12. menggambar grafik fungsi arc sinus;
13. menggambar grafik fungsi arc cosinus;
14. menggambar grafik fungsi arc tangen.

B. Deskripsi Singkat Isi Bab

Bab ini berisi tentang:

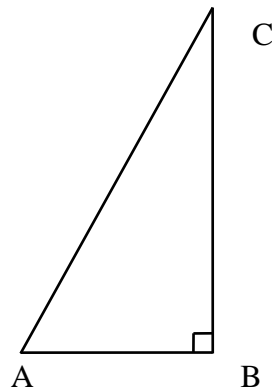
1. definisi sinus, cosinus, dan tangen dalam segitiga siku-siku;
2. fungsi sinus;
3. fungsi cosinus;
4. fungsi tangen.

5. fungsi arc sinus;
6. fungsi arc cosinus;
7. fungsi arc tangen.

Kata kunci: fungsi, trigonometri, invers trigonometri

5.2 Fungsi Trigonometri

A. Definisi sinus, cosinus, dan tangen (*sine, cosine, and tangent*)



Segitiga ABC siku-siku di B

$\text{Sinus A} = \frac{BC}{AC}$	$\text{Cosinus A} = \frac{AB}{AC}$	$\text{Tangen A} = \frac{BC}{AB}$
----------------------------------	------------------------------------	-----------------------------------

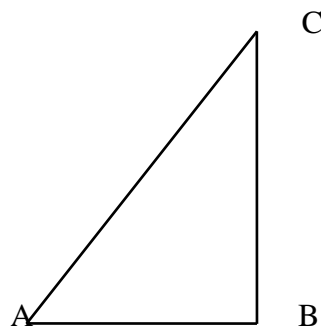
Contoh

1. Hitunglah nilai sinus, kosinus dan tangen dari sudut A dan C dalam segitiga di bawah ini.

Panjang sisi AB = 1 m

Panjang sisi BC = $\sqrt{3}$ m

Panjang sisi AC = 2 m



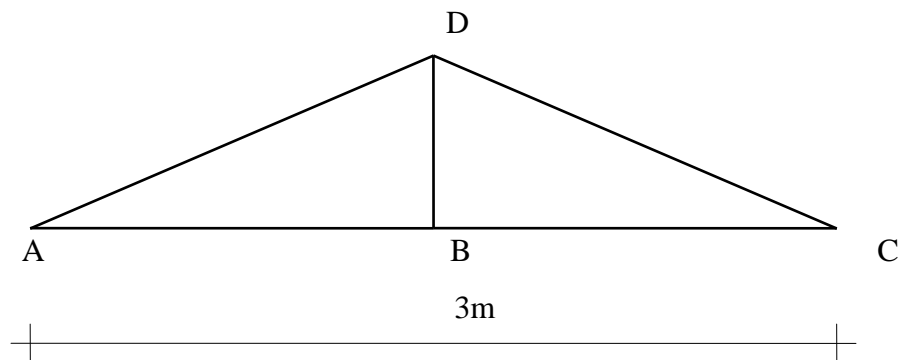
Penyelesaian:

$$\text{Sinus } A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Cosinus } A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tangen } A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

2. Diketahui rangka batang (kuda-kuda) seperti gambar di bawah ini. Jika diketahui sudut $A = 30^\circ$, tentukanlah panjang kaki kuda-kuda (sisi AD) dan tinggi tiang kuda-kuda (sisi BD).



Penyelesaian:

Dari daftar trigonometri atau dari kalkulator dapat diperoleh,

$$\sinus 30^\circ = 0,5 \quad \text{cosinus } 30^\circ = 0,8660 \quad \text{tangen } 30^\circ = 0,5774$$

Salah satu dari nilai-nilai tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan soal ini.

$$\text{Tangen } A = \text{tangen } 30^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$0,5774 = \frac{BD}{AB}$$

$$BD = 0,5774 \cdot AB$$

$$= 0,5774(1\frac{1}{2})$$

$$= 0,8661$$

Jadi tinggi kaki kuda-kuda (sisi BD) = 0,8661 m

Jika daerah definisi diperluas untuk $x \in \mathbb{R}$ maka dapat diamati bahwa $f(x) = \sin x$ adalah fungsi periodik dengan periode 360° atau 2π radian seperti gambar dibawah ini.

2. Fungsi Cosinus

Bentuk Umum

Bentuk umum fungsi sinus adalah $f(x) = \cos x$, dengan x adalah satuan ukuran sudut.

Grafik fungsi cosinus dapat diperoleh dengan membuat tabel nilai cosinus dari sudut-sudut yang berada dalam daerah definisi. Dibawah ini fungsi cosinus digambarkan grafiknya untuk daerah definisi $[0^\circ, 360^\circ]$

x°	0	30	60	90	120	150	180	210	240	
270										
cosx	1	0,8660	0,5	0	-0,5	-0,8660	-1	-0,8660	-0,5	0
		300	330	360						
		0,5	0,8660	1						

Jika daerah definisi diperluas untuk $x \in \mathbb{R}$ maka dapat diamati bahwa $f(x) = \cos x$ adalah fungsi periodik dengan periode 360° atau 2π radian seperti gambar dibawah ini.

3. Fungsi Tangen

Bentuk Umum

Bentuk umum fungsi sinus adalah $f(x) = \tan x$, dengan x adalah satuan ukuran sudut.

Grafik fungsi tangen dapat diperoleh dengan membuat tabel nilai tangen dari sudut-sudut yang berada dalam daerah definisi. Dibawah ini fungsi tangen digambarkan grafiknya untuk daerah definisi $[0^\circ, 360^\circ]$

x°	0	30	60	90	120	150	180	210	240
tanx	0	0,5774	1,7321	∞	-1,7321	-0,5774	0	0,5774	1,7321
	270	300	330	360					
	∞	-1,7321	-0,5774	0					

Jika daerah definisi diperluas untuk $x \in \mathbb{R}$ maka dapat diamati bahwa $f(x) = \tan x$ adalah fungsi periodik dengan periode 180° atau π radian seperti gambar dibawah ini.

2.4 Fungsi Invers Trigonometri

Definisi

Jika $x = \sin y$, maka fungsi invers dari sinus didefinisikan dengan $y = \arcsin x$.

Dengan cara yang sama, jika:

$x = \cos y$ maka inversnya adalah $y = \arccos x$;

$x = \tan y$ maka inversnya adalah $y = \arctan x$.

Contoh:

1. Jika $\sin y = 0,5$, hitunglah y , jika $y < 90^\circ$!

Penyelesaian:

$$\sin y = 0,5$$

$$y = \arcsin 0,5$$

$$y = 30^\circ$$

Catatan : ingat bahwa $\sin 30^\circ = 0,5$

2. Jika $\cos y = 0,7071$, hitunglah y jika $y < 90^\circ$!

Penyelesaian:

$$\cos y = 0,7071$$

$$y = \arccos 0,7071$$

$$y = 45^\circ$$

Catatan : ingat bahwa $\cos 45^\circ = 0,7071$

3. Jika $\tan y = 1,7321$, hitunglah y , jika $y < 90^\circ$!

Penyelesaian:

$$\tan y = 1,7321$$

$$y = \arctan 1,7321$$

$$y = 60^\circ$$

Catatan : ingat bahwa $\tan 60^\circ = 1,7321$

Daerah definisi dan grafik fungsi invers trigonometri adalah sebagai berikut:

1. **Grafik fungsi $y = \arcsin x$**

Fungsi: $y = \arcsin x$

Daerah definisi: $-1 \leq x \leq 1$

Bagian utama : $-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$

2. Grafik fungsi $y = \arccos x$

Fungsi : $y = \arccos x$

Daerah definisi: $-1 \leq x \leq 1$

Bagian utama : $0^\circ \leq y \leq 180^\circ$

3. Grafik fungsi $y = \arctan x$

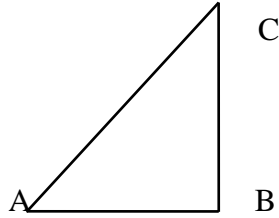
Fungsi : $y = \arctan x$

Daerah definisi: $x \in \mathbb{R}$

Bagian utama : $-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$

Rangkuman

1. Definisi sinus, cosinus, dan tangen (*sine, cosine, and tangent*)



Segitiga ABC siku-siku di B

$$\text{Sinus } A = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{Cosinus } A = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Tangen } A = \frac{BC}{AB}$$

2. Bentuk umum fungsi sinus adalah $f(x) = \sin x$, dengan x adalah satuan ukuran sudut.

3. Bentuk umum fungsi cosinus adalah $f(x) = \cos x$, dengan x adalah satuan ukuran sudut.

4. Bentuk umum fungsi tangen adalah $f(x) = \tan x$, dengan x adalah satuan ukuran sudut.

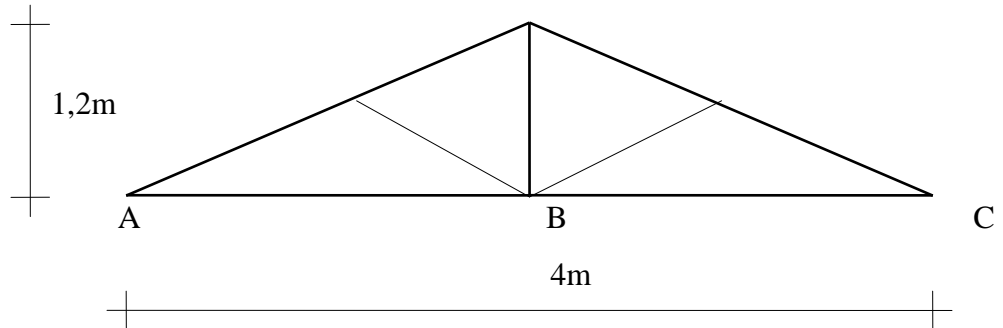
5. Jika $x = \sin y$, maka fungsi invers dari sinus didefinisikan dengan $y = \arcsin x$.

Dengan cara yang sama, jika $x = \cos y$ maka inversnya adalah $y = \arccos x$;

$x = \tan y$ maka inversnya adalah $y = \arctan x$.

Latihan

1. Perhatikan gambar struktur kuda-kuda di bawah ini.



Dengan menggunakan definisi-definisi dalam trigonometri, hitunglah panjang tiap-tiap elemen kuda-kuda tersebut.

2. Gambarkan grafik fungsi-fungsi di bawah ini. Tentukan perioda dan titik-titik ekstrimnya.

a) $y = \sin 2x$

b) $y = 3 \sin x$

c) $y = 3 \sin 2x$

d) $y = \cos 3x$

e) $y = 4 \cos x$

f) $y = 4 \cos 3x$

g) $y = \tan 2x$

h) $y = 2 \tan x$

i) $y = 2 \tan 2x$

k) $y = \sin x + \cos x$

l) $y = \arcsin 2x$

m) $y = 2 \arcsin x$

n) $y = 2 \arcsin 2x$

o) $y = \arccos 3x$

p) $y = 3 \arccos x$

q) $y = 3 \arccos 3x$

r) $y = \arctan 2x$

s) $y = 2 \arctan x$

t) $y = 2 \arctan 2x$

